

## Лекция 7.

Разветвленные цепные реакции. Критические явления в разветвленных цепных реакциях.

Э.-К. стр. 380-383, 389-390.

Простое выражение для скорости образования радикалов:

$$\frac{d[A\cdot]}{dt} = r_0 + (f(p) - g(p))[A\cdot] \quad (1)$$

$r_0$  — постоянная скорость образования радикала на стадии зарождения цепи,  $f(p)[A\cdot]$  — скорость образования радикала на стадии развития цепи,  $g(p)[A\cdot]$  — скорость гибели радикала.  $f$  и  $g$  не зависят от концентрации радикалов, это функции общего давления  $p$  в системе. Получаем выражение для скорости изменения концентрации свободных радикалов:

$$\frac{d[A\cdot]}{r_0 + (f(p) - g(p))[A\cdot]} = dt$$

$$\ln\left(\frac{r_0}{f(p) - g(p)} + [A\cdot]\right) - \ln\left(\frac{r_0}{f(p) - g(p)}\right) = (f(p) - g(p))t \quad (2)$$

$$\left(\frac{r_0}{f(p) - g(p)} + [A\cdot]\right) = \left(\frac{r_0}{f(p) - g(p)}\right) e^{(f(p) - g(p))t}$$

$$[A\cdot] = \left(\frac{r_0}{f(p) - g(p)}\right) (e^{(f(p) - g(p))t} - 1)$$

Возможны три случая:

$$\text{а) } f > g; \text{ б) } f < g \quad \text{и в) } f = g. \quad (3)$$

Случай б) совпадает со случаем неразветвленной цепной реакции. Случай в) - пограничный. В случае а) концентрация радикалов со временем будет расти по экспоненте, скорость реакции в целом будет также нарастать, что в результате может привести к взрыву!

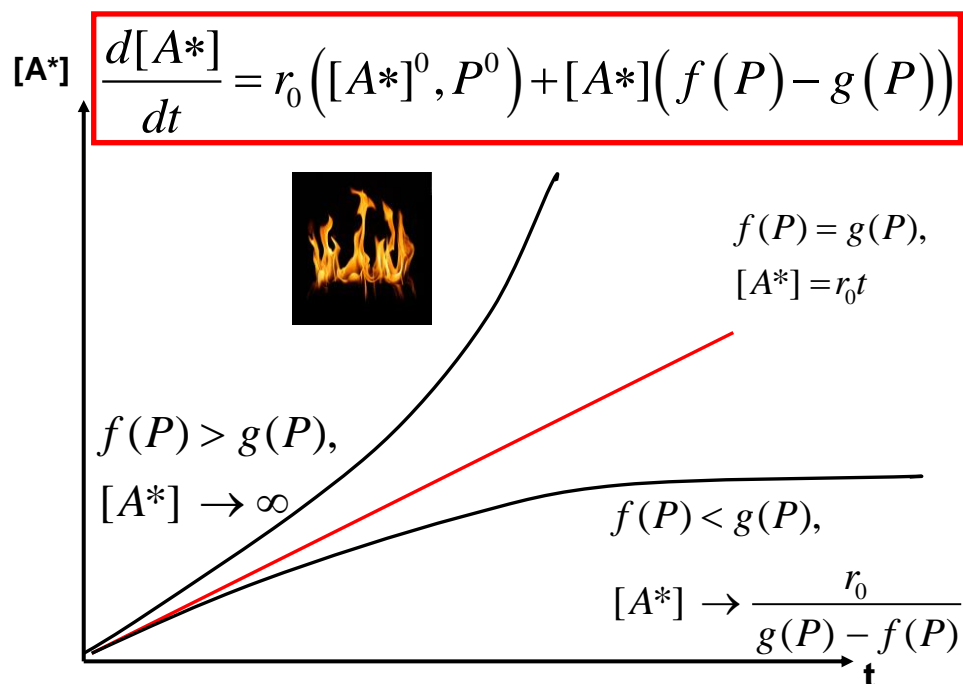


Рис.1 Зависимость концентрации свободных радикалов от времени при разветвленной цепной реакции. Три возможных режима.

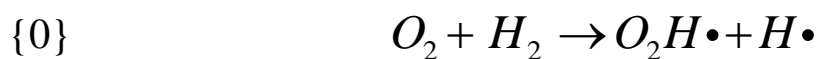
#### Реакция окисления водорода.

Механизм этой реакции представляется уравнениями:

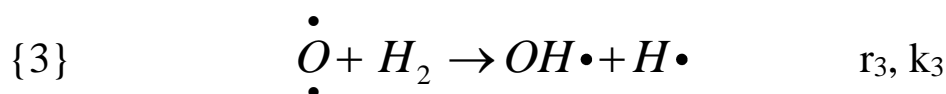
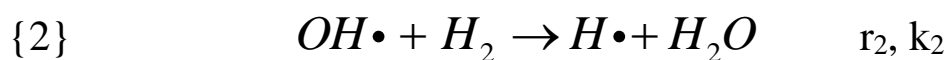
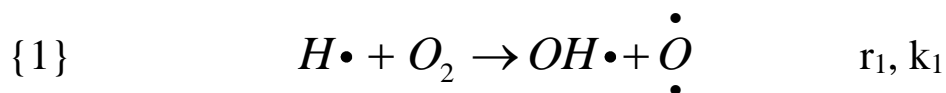
Зарождение цепи:



или



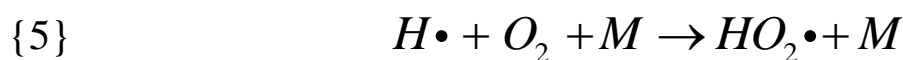
Развитие и разветвление цепи:



Уравнение для реакции гибели радикалов водорода на стенке можно записать как



Считается, что в объеме радикалы  $H\cdot$  в основном гибнут в результате образования достаточно инертного радикала  $O_2H\cdot$ :



$$r_5 = k_5 [H\cdot][O_2][M]$$

Запишем уравнения для скорости образования всех трех свободных радикалов на стадии развития и разветвления цепи:

$$\frac{d[H\cdot]}{dt} = r_2 + r_3 - r_1$$

$$\frac{d[OH\cdot]}{dt} = r_1 + r_3 - r_2$$

$$\frac{d[\dot{O}]}{dt} = r_1 - r_3$$

(5)

Считаем, что для двух радикалов,  $\dot{O}$  и  $OH\cdot$ , выполняется условие квазистационарности:

$$\frac{d[OH\cdot]}{dt} = r_1 + r_3 - r_2 = 0$$

$$\frac{d[\dot{O}]}{dt} = r_1 - r_3 = 0$$

$$r_1 = r_3 ; r_1 + r_3 = r_2 \quad (6)$$

Отсюда следует, что

$$2r_1 = r_2 \quad (7)$$

На стадии развития и разветвления скорость образования  $H\cdot$  пропорциональна концентрации этого радикала:

$$d[H\cdot]/dt = r_2 + r_3 - r_1 = r_2 = 2 r_1 = 2k_1[H\cdot][O_2] \quad (8)$$

Для радикала водорода (считается, что радикалов водорода в системе больше всего!) следует записать полное уравнение баланса, включающее в себя и стадию инициирования  $\{0\}$ , и стадию гибели в двух вариантах  $\{4\}, \{5\}$ :

$$d[H\cdot]/dt = r_0 + 2k_1[H\cdot][O_2] - k_4 [H\cdot] - k_5 [H\cdot][O_2][M] \quad (9)$$

Условие стационарности для радикала  $H\cdot$  не вводится.

Такой подход Семенов назвал методом полустационарных концентраций. Преобразуя (9), получаем

$$d[H\cdot]/dt = r_0 + [H\cdot] \{f(p) - g(p)\} \quad (10)$$

$$f(p) = 2k_1[O_2] = 2k_1\gamma p; \quad g(p) = k_4 + k_5[O_2][M] = k_4 + k_5 \gamma p^2 \quad (11)$$

$p$  – общее давление в системе,  $\gamma = \frac{[O_2]}{p} = \frac{p_{O_2}}{RT} = \frac{1}{RT} \times \frac{p_{O_2}}{p}$  – величина, характеризующая долю кислорода в общем давлении.

Интегрируем (10):

$$[H\cdot] = \left( \frac{r_0}{f(p) - g(p)} \right) \left( e^{(f(p)-g(p))t} - 1 \right) \quad (12)$$

$$f(p) > g(p), [H\cdot] \rightarrow \infty; \quad f(p) < g(p), \quad [H\cdot] \rightarrow \left( \frac{r_0}{g(p) - f(p)} \right) \quad (13)$$

$f$  и  $g$  зависят от общего давления в системе, соответственно, в первой и во второй степени. При различных значениях общего давления ( $f-g$ ) может быть как больше, так и

меньше нуля. Скорость реакции образования воды пропорциональна концентрации радикалов  $H\bullet$ .

На рисунке в координатах «давление-температура» схематически представлена кривая, внутри которой реакция окисления водорода происходит в режиме горения и взрыва.

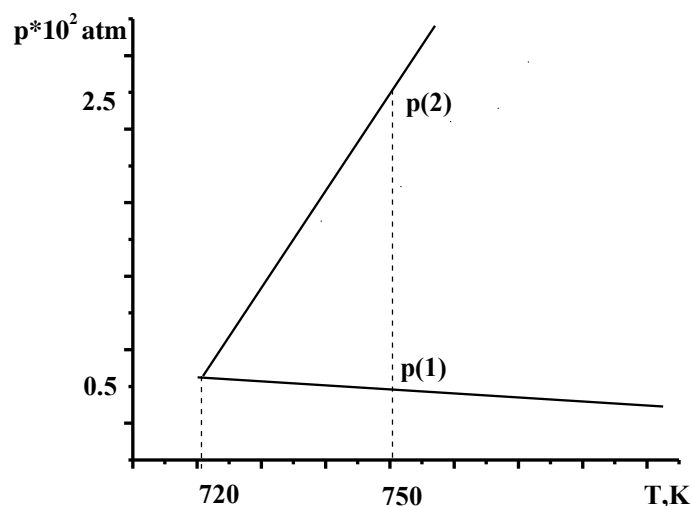


Рис.2. Полуостров воспламенения в системе  $O_2 + H_2$ .

При температуре  $750\text{ K}$  и давлениях ниже  $p(1)$  реакция идет весьма медленно. Она резко ускоряется вблизи критического давления  $p(1)$ , и между  $p(1)$  и  $p(2)$  при всех давлениях происходит горение. В этой области невозможно установить формальный порядок реакции по кислороду и водороду. При давлениях, выше  $p(2)$  горение прекращается.

При низких давлениях самая быстрая стадия - гибель на стенках, добраться до стенок легко. С повышением давления растет скорость образования  $H\bullet$  на стадии развития цепи, однако, чем выше давление, тем больше влияние реакции гибели в объеме:

$$f(p) - g(p) > 0 \text{ внутри кривой, } f(p) - g(p) < 0 \text{ "вне" кривой} \quad (14)$$

На самой кривой  $f(p) - g(p) = 0$

$$2k_1\gamma p - k_4 - k_5 \gamma p^2 = 0 \quad (15)$$

$p(1)$  и  $p(2)$  определяются, как корни квадратного уравнения:

$$p_{1,2} = \frac{-2k_1\gamma \pm \sqrt{4k_1^2\gamma^2 - 4k_4k_5\gamma}}{-2k_5\gamma} \quad (16)$$

Дальнейшее упрощение состоит в том, что при расчете корней пренебрегают последовательно одним из механизмов гибели.

$$p_1 = k_4 / (2k_1 \gamma), \quad k_5 \gamma p^2 = 0, \quad p_2 = 2k_1 / k_5, \quad k_4 = 0 \quad (17)$$

Соотношения (17) можно получить из (16) с помощью известной теоремы Виета. При давлениях ниже  $p(1)$  условие  $(f-g) < 0$  обеспечивается за счет гибели радикалов на стенке. При давлениях выше  $p(2)$  реакцию сдерживает гибель в объеме. Зависимость критических давлений от температуры определяется температурной зависимостью констант скорости  $k_1, k_4, k_5$ . Константа скорости  $k_4$  существенным образом зависит от отношения площади поверхности к объему системы, т.е. от формы сосуда.

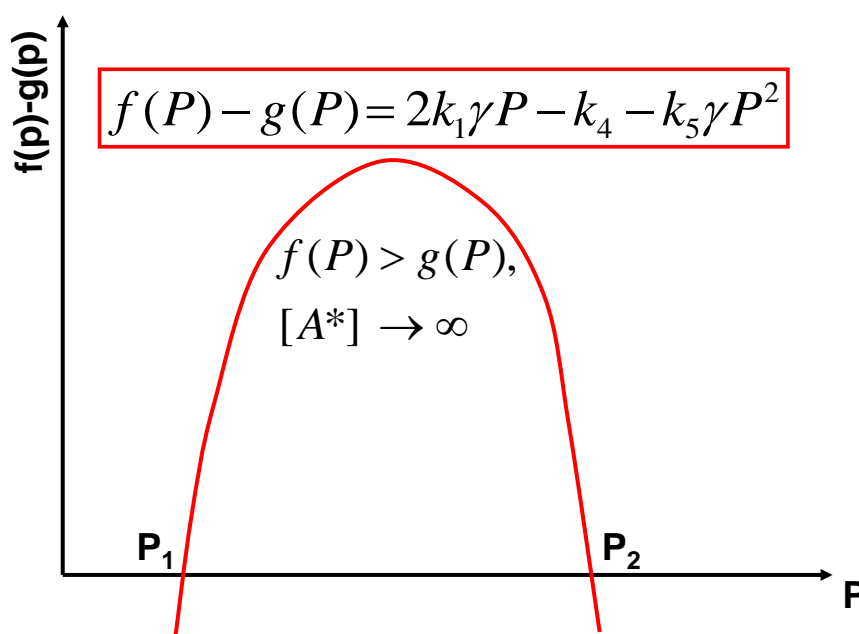


Рис.3. Функция  $f(P) - g(P)$  (см. уравнение 13)

#### Реакторы идеального смешения и идеального вытеснения.

Проточный реактор – это открытая система. Реагенты подаются в реактор непрерывно с постоянной скоростью, продукты с постоянной скоростью - выводятся. Это может быть газовый поток, состоящий из инертного газа - носителя и вещества – реагента или поток жидкости, состоящий из инертного растворителя и растворенного в нем реагента.

Внутри системы в каждой точке происходит химическая реакция с участием  $A$ , вещество  $A$  передвигается внутри реактора с постоянной скоростью  $V_A$ , концентрация  $A$  непрерывно меняется вдоль реактора по координате  $l$ :

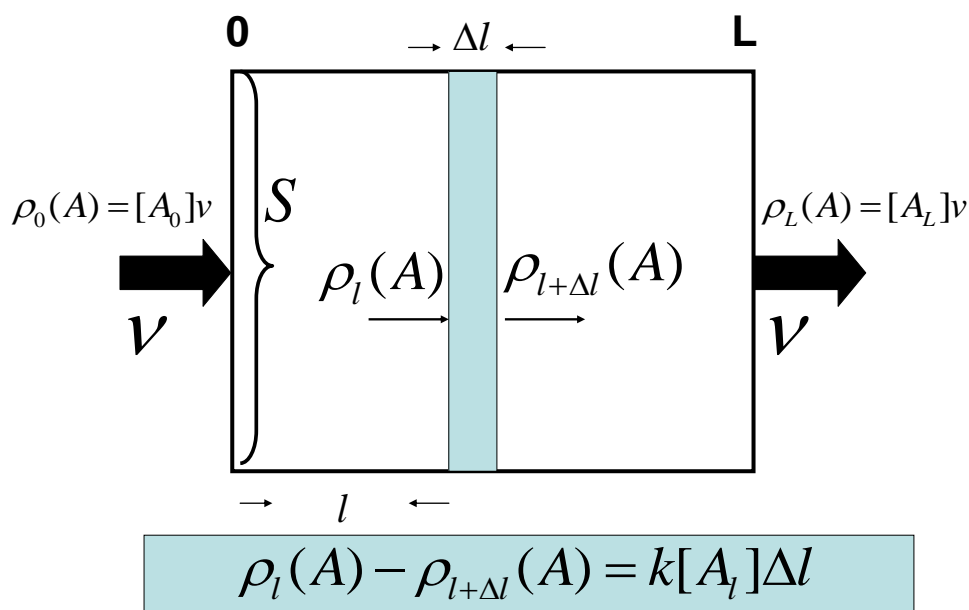


Рис. 4. Стационарное состояние в проточном реакторе. Реактор идеального вытеснения, в котором протекает необратимая реакция первого порядка.

Рассмотрим тонкий слой внутри реактора. Его левая граница находится на расстоянии  $l$  от левого края, а правая - на расстоянии  $l + dl$ . Слева в слой поступает поток вещества  $A$ , направо вещество  $A$  уходит:

$$\rightarrow \rho(A)_l \quad \rho(A)_{l+dl} \rightarrow$$

Поток имеет размерность [ моль/ см<sup>2</sup> /сек ].

Количество вещества в секунду, входящее и выходящее из малого объема:

$$\rightarrow \rho(A)_l S \quad \rho(A)_{l+dl} S \rightarrow$$

$S$ - площадь поперечного сечения.

Из соображений размерности видно, что поток можно представить себе в виде произведения скорости движения вещества  $A$  на концентрацию  $A$  в сечении  $l$ :

$$\rightarrow v_A [A]_l S \quad v_A [A]_{l+dl} S \rightarrow$$

Что такое концентрация в сечении? За единицу времени через сечение проходит  $\Delta n_A$  молей вещества  $A$ , за тоже время проходит объем газа (жидкости), равный  $V$  (объемная скорость), тогда

$$\Delta n_A \left( \frac{\text{mol}}{\text{sec}} \right) = \rho_A S; \quad V \left( \frac{\text{dm}^3}{\text{sec}} \right) = v_A S \quad (18)$$

$$[A]_l = \frac{\Delta n_A}{V} = \frac{\rho_A S}{v_A S} = \frac{\rho_A}{v_A}$$

Внутри нашего тонкого слоя происходит химическая реакция, в которой реагент А расходуется:

$$-\left\{ \frac{d[A]}{dt} \right\}_{\text{хим}} = r_{\text{хим}} \quad (19)$$

В результате получаем уравнение баланса в следующем виде:

$$\frac{d[A]}{dt} dl S = \rho_l(A) S - \rho_{l+dl}(A) S - r_{\text{хим}} S dl \quad (20)$$

Изменение количества вещества А внутри тонкого слоя в единицу времени определяется «приходом» А слева минус «уходом» А вправо минус потерями за счет химической реакции:

$$\frac{d[A]}{dt} = \frac{\rho_l(A) - \rho_{l+dl}(A)}{dl} - r_{\text{хим}} \quad (21)$$

$$\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d\rho_l(A)}{dl} + \left\{ \frac{d[A]}{dt} \right\}_{\text{хим}}, \quad dl \rightarrow 0$$

Условие стационарности, т.е. независимости концентрации от времени

$$-\frac{d\rho_l(A)}{dl} + \left\{ \frac{d[A]}{dt} \right\}_{\text{хим}} = 0, \quad (22)$$

$$-\frac{d\rho_l(A)}{dl} = -\left\{ \frac{d[A]}{dt} \right\}_{\text{хим}}$$

Используем соотношение (18)



$$-v_A \frac{d[A]}{dl} = - \left\{ \frac{d[A]}{dt} \right\}_{хим} \quad (23)$$

Скорость потока постоянна, концентрация  $A$  может непрерывно меняться по длине реактора. Предполагаем, что, не происходит перемешивание вещества внутри реактора, но внутри каждого тонкого слоя подобное перемешивание происходит. В *реакторе идеального вытеснения* перемешивание и диффузия внутри объема отсутствуют. В этом реакторе стационарная концентрация  $A$  непрерывно меняется вдоль оси  $l$  (см. уравнение (23) и рис. 4).

В *реакторе идеального смешения* концентрация  $A$  выравнивается по всему объему реактора с помощью мешалки. Уравнение (23) теряет смысл.

Необратимая реакция первого порядка в реакторах идеального смешения и вытеснения.

*Реактор идеального вытеснения*

Уравнение (23) можно записать как:

$$-v_A \frac{d[A]}{dl} = k[A] \quad (24)$$

Проинтегрируем по длине реактора:

$$\frac{d[A]}{[A]} = - \frac{k}{v_A} dl; \quad \ln \frac{[A]_l}{[A]_0} = - \frac{k}{v_A} l; \quad (25)$$

$$[A]_l = [A]_0 e^{-\frac{k}{v_A} l}$$

Можно вычислить значение концентрации на выходе:

$$[A]_L = [A]_0 e^{-\frac{k}{v_A} L} = [A]_0 e^{-k\tau} \quad (26)$$

$\tau = \frac{L}{v_A}$  - среднее время пребывания частицы в реакторе.

Измерив концентрацию на выходе из реактора, определяем константу скорости:

$$\frac{\ln \frac{[A]_L}{[A]_0}}{\tau} = -k \quad (27)$$

Реактор идеального смешения.

Полное изменение количества  $A$  внутри реактора равно:

$$\frac{d[A]_L}{dt} LS = v_A S[A]_0 - v_A S[A]_L - r_{xum} LS; \quad (28)$$

Условие стационарности (постоянство концентрации  $A$  внутри реактора) имеет вид

$$\frac{d[A]_L}{dt} LS = 0 = v_A S[A]_0 - v_A S[A]_L - r_{xum} LS; \quad (29)$$

$$[A]_0 - [A]_L = r_{xum} \frac{L}{v_A}$$

Пусть наша реакция необратима и имеет первый порядок по  $A$ , тогда

$$[A]_0 - [A]_L = k[A]_L \frac{L}{v_A} \quad (30)$$

Перед нами уравнение баланса массы по компоненту  $A$  при условии, что концентрация  $A$  во всем реакторе и на выходе из реактора одинакова и не зависит от времени. Отсюда легко получить выражение для константы скорости:

$$\frac{\{[A]_0 - [A]_L\}}{[A]_L \times \tau} = k \quad (31)$$

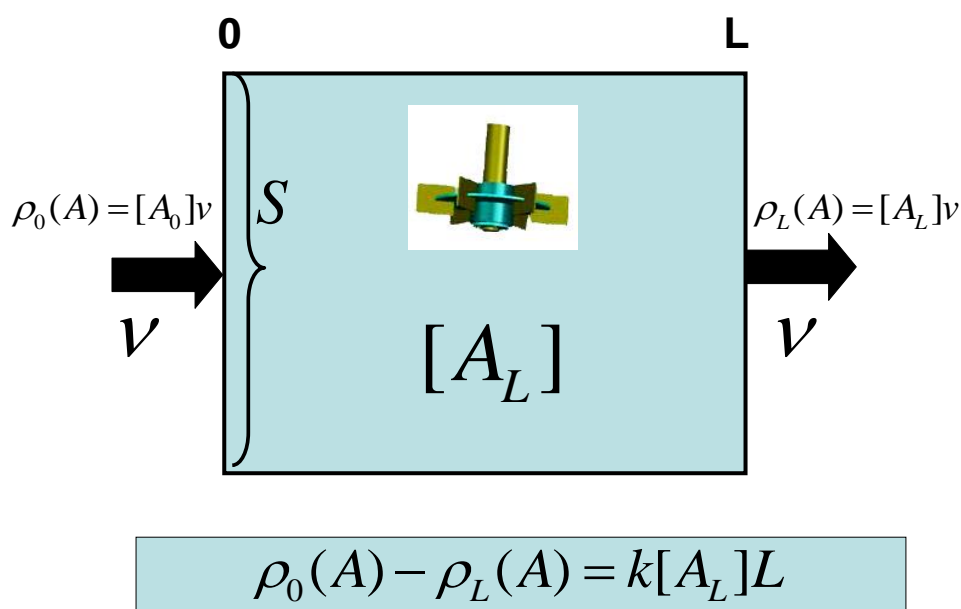


Рис. 5. Стационарное состояние внутри проточного реактора. Необратимая реакция первого порядка в реакторе идеального смешения.

Сравним выражения, полученные в реакторах двух типов:  
Идеальное вытеснение:

$$-\ln \frac{[A]_L}{[A]_0} \frac{1}{\tau} = \ln \frac{[A]_0}{[A]_L} \frac{1}{\tau} = k$$

Идеальное смешение

$$\frac{[A]_0 - [A]_L}{[A]_L} \frac{1}{\tau} = \left( \frac{[A]_0}{[A]_L} - 1 \right) \frac{1}{\tau} = k \quad (32)$$

При  $\frac{[A]_0}{[A]_L} \rightarrow 1$ ,  $\ln \frac{[A]_0}{[A]_L} \rightarrow \frac{[A]_0}{[A]_L} - 1$   
 $(\ln x \approx x - 1, \quad x \rightarrow 1)$

Концентрации на выходе в обоих реакторах совпадают.

Если скорость велика и реактор «короткий»  $[A]_L \rightarrow [A]_0$ . Наоборот, в «длинном» реакторе в обоих случаях успевает прореагировать все вещество и  $[A]_L \rightarrow 0$ . Можно показать, что реактор идеального вытеснения эффективнее реактора идеального

смешения. Например, при одинаковой длине, скорости потока, константе скорости и небольших  $\tau$  на выходе получаем:

$$\frac{[A]_{L, \text{выт}}}{[A]_{L, \text{смеш}}} = \frac{[A]_0 e^{-k\tau}}{\frac{[A]_0}{1+k\tau}} = \frac{1+k\tau}{1+k\tau + (k\tau)^2/2! + \dots} < 1 \quad (33)$$

На выходе реактора идеального вытеснения концентрация А ниже. Это означает, что в реакторе идеального вытеснения больше вещества А превратилось в В.

Обратимая реакция первого порядка в реакторе идеального смешения.

Пусть наша реакция обратима, и имеет первый порядок в обе стороны:

$$-\frac{d[A]}{dt} = k_1[A] - k_{-1}[B]$$

Получим выражение для отношения стационарных концентраций В и А в реакторе идеального смешения. Запишем условие стационарности для продукта В внутри реактора:

$$\begin{aligned} \frac{d[B]}{dt} SL &= (k_1[A]_L - k_{-1}[B]_L) SL - [B]_L v_A S; \\ \frac{d[B]}{dt} &= 0 = (k_1[A]_L - k_{-1}[B]_L) - [B]_L \frac{1}{\tau} \\ [B]_L &= [A]_0 - [A]_L = (k_1[A]_L - k_{-1}[B]_L) \tau \\ \frac{[B]_L}{[A]_L} &= \left( k_1 - k_{-1} \frac{[B]_L}{[A]_L} \right) \tau \\ \frac{[B]_L}{[A]_L} (1 + k_{-1}\tau) &= k_1\tau; \quad \frac{[A]_L}{[B]_L} = \frac{1}{k_1\tau} + \frac{1}{K} \end{aligned} \quad (34)$$

Построим график зависимости  $\frac{[A]_L}{[B]_L} \rightarrow \frac{1}{\tau}$ . Для этого будем менять скорость потока

и, следовательно, время  $\tau$ . Угол наклона линейной зависимости даст нам константу скорости, отрезок - константу равновесия. Таким образом, реактор идеального смешения позволяет определять константы скорости прямой и обратной реакции.