Все наши Якобианы.

Для того, чтобы от дифференциалов одних переменных перейти к дифференциалам других, нужно посчитать соответствующий определитель, Якобиан. Вот, как это делается.

В лекции 14 от выражения

$$dw(\varepsilon_1)dw(\varepsilon_2) = \left(\frac{1}{\pi kT}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{kT}\right)\varepsilon_1^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{kT}\right)\varepsilon_2^{-\frac{1}{2}}d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \tag{2}$$

мы переходим к

$$dw(\varepsilon_1)dw(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\pi kT}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{kT}\right)\varepsilon_1^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{kT}\right)\left(\varepsilon-\varepsilon_1\right)^{-\frac{1}{2}}d\varepsilon_1 d\varepsilon, \tag{3}$$

Предстоит замена «старых» переменных $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ на новые переменные $\varepsilon, \varepsilon_2$. Выразим «старые» переменные через новые. По условию у нас

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1$$

Произведения дифференциалов старых и новых переменных связаны якобианом, J

$$d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 = J\, d\varepsilon d\varepsilon_1$$

Где J – якобиан, т.е. определитель вида

$$J = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial\varepsilon_1}{\partial\varepsilon_1}\right)_{\varepsilon} & \left(\dfrac{\partial\varepsilon_1}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon_1} \\ \left(\dfrac{\partial\varepsilon_2}{\partial\varepsilon_1}\right)_{\varepsilon} & \left(\dfrac{\partial\varepsilon_2}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

Следовательно, $d\varepsilon d\varepsilon_2 = d\varepsilon_1 d\varepsilon_2$, что мы и использовали при переходе от (2) к (3) в лекции.

Похожий переход мы делали и в лекции 10 , когда при выводе уравнения ТАС заменяли скорости частиц A и B, V_A, V_B относительной скоростью $V_{отн}$ и скоростью центра масс $V_{Ц.М.}$ пары A,B. В этом случае уравнения связи имеют вид

$$V_{отн} = V_A - V_B\ ;\quad V_{Ц.М.} = \frac{m_A V_A + m_B V_B}{m_A + m_B}$$

Выразим «старые» переменные через новые

$$V_A = V_{Ц.М.} + V_{отн} \times \frac{m_B}{m_A + m_B};\quad V_B = V_{Ц.М.} - V_{отн} \times \frac{m_A}{m_A + m_B}$$

Нужный нам якобиан выглядит так

$$J = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial V_A}{\partial V_{отн}}\right)_{V_{Ц.М.}} & \left(\frac{\partial V_A}{\partial V_{Ц.М.}}\right)_{V_{отн}} \\ \left(\frac{\partial V_B}{\partial V_{отн}}\right)_{V_{Ц.М.}} & \left(\frac{\partial V_B}{\partial V_{Ц.М.}}\right)_{V_{отн}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{m_B}{m_A + m_B} & 1 \\ -\frac{m_A}{m_A + m_B} & 1 \end{vmatrix} = \frac{m_B}{m_A + m_B} + \frac{m_A}{m_A + m_B} = 1$$

Мы видим, что

$$dV_A dV_B = J dV_{отн} dV_{Ц.М.} = dV_{отн} dV_{Ц.М.} \qquad (3)$$

Соотношение (3) использовано в лекции 10 (это уравнения (7))

Несколько раз (в лекциях 19 и 23 осеннего семестра и в лекции 10 весеннего семестра) мы переходили от декартовых координат x, y, z к сферическим переменным $r, \theta. \varphi.$ Старые и новые координаты связаны между собой соотношениями

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta$$

В этом случае якобиан имеет размерность $3x3$, но сосчитать его легко:

$$J = r^2 \sin\theta$$

В результате получаем

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$