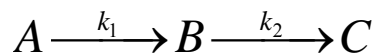


РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ в ЗАДАЧЕ о
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ РЕАКЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Внимание! То, что здесь написано, необязательно знать на экзамене! Для экзамена достаточно уравнений (1),(2) и готового решения (8).

Решение прямой кинетической задачи в случае последовательной реакции первого порядка



приводит к двум дифференциальным уравнениям

$$\frac{d[A](t)}{dt} = -k_1[A](t) \quad (1)$$

$$\frac{d[B](t)}{dt} = -k_2[B](t) + k_1[A](t) \quad (2)$$

Решение уравнения (1) нам знакомо

$$[A](t) = [A]_0 e^{-k_1 t} \quad (3)$$

Уравнение (2) требует дополнительного обсуждения. Вот, один из возможных приемов нахождения функции $[B](t)$.

Сразу договоримся, что будем искать её в виде

$$[B](t) = Q(t) \times e^{-k_2 t} \quad (4)$$

Таким образом, для того чтобы найти $[B](t)$, нам нужно теперь получить в явном виде $Q(t)$. Подставим в уравнение (2) соотношения (3) и (4)

$$\begin{aligned} \frac{d[B](t)}{dt} &= -k_2 Q(t) e^{-k_2 t} + k_1 [A]_0 e^{-k_1 t} = \\ &= \frac{dQ(t) e^{-k_2 t}}{dt} = \frac{dQ(t)}{dt} e^{-k_2 t} - k_2 Q(t) e^{-k_2 t} \end{aligned} \quad (5)$$

После сокращений получаем

$$\frac{dQ(t)}{dt} e^{-k_2 t} = k_1 [A]_0 e^{-k_1 t}; \quad \frac{dQ(t)}{dt} = k_1 [A]_0 e^{-(k_1 - k_2)t} \quad (6)$$

Интегрируем уравнение (6)

$$\begin{aligned}
dQ(t) &= k_1[A]_0 e^{-(k_1-k_2)t} dt \\
Q(t) - Q(t=0) &= \int_0^t k_1[A]_0 e^{-(k_1-k_2)t} dt = \\
[A]_0 \frac{k_1}{k_2 - k_1} e^{-(k_1-k_2)t} - [A]_0 \frac{k_1}{k_2 - k_1} &= \\
[A]_0 \frac{k_1}{k_2 - k_1} (e^{-(k_1-k_2)t} - 1) &
\end{aligned} \tag{7}$$

Теперь остается подставить (7) в (4) и получить зависимость концентрации промежуточного продукта В от времени

$$[B](t) = Q(t) \times e^{-k_2 t} = [A]_0 \frac{k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \tag{8}$$

Прием, который мы использовали для решения дифференциального уравнения (2) и получения соотношения (8) можно назвать способом Лагранжа. Этот способ применим для решения любого уравнения вида

$$\frac{dy(t)}{dt} = F(t)y(t) + P(t) \tag{9}$$

где $F(t), P(t)$ - некоторые функции от переменной t . Мы видим, что (9) несколько сложнее (2). В (2) $[B](t)$ в правой части умножается на константу, а в уравнении (9) $y(t)$ умножен на функцию $F(t)$. Существенно, что правая часть уравнений (9) и (2) зависит от $y(t)$ (или $[B](t)$) линейно.

Последовательность шагов при решении (9) – такая же, как и при решении (2). Общее решение (9) имеет вид

$$y(t) = Q(t) \times e^{-\int F(t) dt} = \left(\int P(t) e^{\int F(t) dt} + C_1 \right) e^{-\int F(t) dt}$$