Все наши Якобианы.

Для того, чтобы от дифференциалов одних переменных перейти к дифференциалам других, нужно посчитать соответствующий определитель, Якобиан. Вот, как это делается.

В лекции 14 от выражения

$$dw(\varepsilon_1)dw(\varepsilon_2)=\left(\frac{1}{\pi kT}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{kT}\right)\varepsilon_1^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{kT}\right)\varepsilon_2^{-\frac{1}{2}}d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \tag{2}$$

мы переходим к

$$dw(\varepsilon_1)dw(\varepsilon)=\left(\frac{1}{\pi kT}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{kT}\right)\varepsilon_1^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{kT}\right)\left(\varepsilon-\varepsilon_1\right)^{-\frac{1}{2}}d\varepsilon_1 d\varepsilon, \tag{3}$$

Вот, как делается замена переменных $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ на новые переменные $\varepsilon,\varepsilon_2$?

По условию у нас

$$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$$

Произведения дифференциалов старых и новых переменных связаны якобианом, J

$$d\varepsilon d\varepsilon_2=J\,d\varepsilon_1 d\varepsilon_2$$

Где J – якобиан, т.е. определитель вида

$$J=\begin{vmatrix}\left(\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_1}\right)_{\varepsilon_2} & \left(\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_2}\right)_{\varepsilon_1}\\ \left(\dfrac{\partial\varepsilon_2}{\partial\varepsilon_1}\right)_{\varepsilon_2} & \left(\dfrac{\partial\varepsilon_2}{\partial\varepsilon_2}\right)_{\varepsilon_1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1-0=1$$

Следовательно, $d\varepsilon d\varepsilon_2=d\varepsilon_1 d\varepsilon_2$, что мы и использовали при переходе от (2) к (3) в лекции.

Похожий переход мы делали и в лекции 10 , когда при выводе уравнения ТАС заменяли скорости частиц A и B, V_A,V_B относительной скоростью $V_{отн}$ и скоростью центра масс $V_{Ц.М.}$ пары A,B. В этом случае уравнения связи имеют вид

$$V_{отн} = V_A - V_B \ ; \quad V_{Ц.М.} = \frac{m_A V_A + m_B V_B}{m_A + m_B}$$

Якобиан выглядит так

$$J = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial V_{отн}}{\partial V_A}\right)_{V_B} & \left(\frac{\partial V_{отн}}{\partial V_B}\right)_{V_A} \\ \left(\frac{\partial V_{Ц.М.}}{\partial V_A}\right)_{V_B} & \left(\frac{\partial V_{Ц.М.}}{\partial V_B}\right)_{V_A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \frac{m_A}{m_A + m_B} & \frac{m_B}{m_A + m_B} \end{vmatrix} = \frac{m_B}{m_A + m_B} + \frac{m_B}{m_A + m_B} = 1$$

Мы видим, что

$$dV_{отн} dV_{Ц.М.} = J\, dV_A dV_B = dV_A dV_B \tag{3}$$

Соотношение (3) использовано в лекции 10 (это уравнения (7))

Несколько раз (в лекциях 19 и 23 осеннего семестра и в лекции 10 весеннего семестра) мы переходили от декартовых координат $x,\ y,\ z$ к сферическим переменным $r,\ \theta.\ \varphi.$
Координаты связаны между собой соотношениями

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \ \ y = r \sin\theta \sin\varphi, \ \ z = r \cos\theta$$

В этом случае якобиан имеет размерность $3x3$, но сосчитать его легко:

$$J = r^2 \sin\theta$$

В результате получаем

$$dx\, dydz = r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$$